

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Komentarz do wykładu z 5. marca

### Zadania

1. Prosty dowód równości  $E(aX + b) = aE(X) + b$ .

Zachodzą równości:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1, \quad E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

Jest zatem  $E(aX + b) = \int_{\mathbb{R}} (ax + b) f(x) dx = a \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx + b \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = aE(X) + b$ .

Można powiedzieć ogólniej: jeżeli  $Y = g(X)$ , to  $E(Y) = E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$ .

2. Definicja dystrybuanty zmiennej losowej.

**Definicja 1.** Niech  $X$  będzie zmienną losową. Dystrybuantą  $F_X(t)$  nazywamy funkcję określoną jako  $F_X(t) = P(X < t)$ .

Jeżeli wiadomo o jakiej zmiennej losowej mówimy, to używamy oznaczenia  $F(t)$ . W wypadku dyskretnym  $F_X(t) = \sum_{x_i < t} p_i$ , w wypadku zmiennej typu ciągłego  $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$ .

3. Nawiązując do wypadku ciągłego i dystrybuanty  $F(t)$  powołajmy się na tzw. "pierwsze główne twierdzenie rachunku całkowego".

**Twierdzenie 1.**

Funkcja  $f(x)$  jest całkowalna na zbiorze  $\mathbb{R}$ . Niech  $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$ . Jest wówczas:

- (a) funkcja  $F(t)$  jest ciągła w  $\mathbb{R}$ ,
- (b) funkcja  $F(t)$  jest różniczkowalna w każdym punkcie  $t$  ciągłości funkcji  $f(t)$ , i w tychże punktach jest  $F'(t) = f(t)$ .

Z czysto praktycznego (obliczeniowego) punktu widzenia interesuje nas podpunkt (b).

4. Dodatkowy przykład na zamianę zmiennych (czyli komentarz do zadania L1.6).

Weźmy pod uwagę funkcję  $f(x, y) = xy$  na obszarze  $[0, 2] \times [0, 1]$ . Sprawdzamy na początek, że

$$\int_0^2 \int_0^1 xy dy dx = \int_0^2 \frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^1 dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1.$$

Wprowadźmy nowe zmienne  $S = X + Y$ ,  $T = X - Y$ . Przekształcenie odwrotne to  $X = \frac{S+T}{2}$  oraz  $Y = \frac{S-T}{2}$ . Obliczenie  $J \equiv J_{xy}$  daje

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \quad (1)$$

Zauważmy też, że (pochodna funkcji odwrotnej to odwrotność pochodnej wyjściowej funkcji)

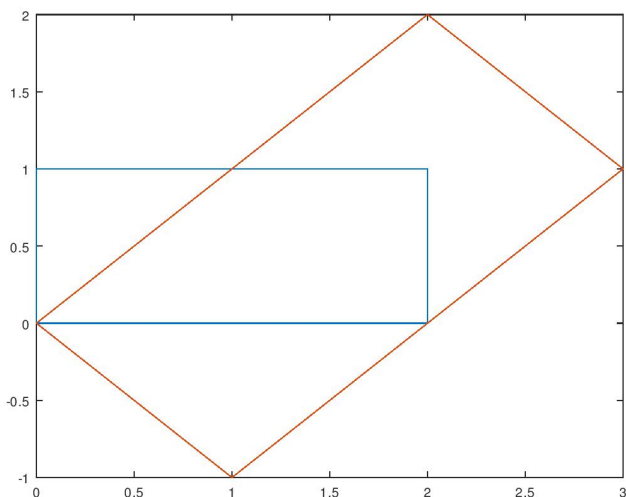
$$J_{st} = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 = \frac{1}{J_{xy}}.$$

Mamy więc dwa elementy dla funkcji  $f(x(s, t), y(s, t))$ :

$$(a) \quad g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)) = \frac{s^2 - t^2}{4},$$

$$(b) \quad |J_{xy}| = \frac{1}{2}$$

Do określenia pozostaje jeszcze znalezienie obszaru całkowania. Wprawdzie  $s \in [0, 3]$ ,  $t \in [-1, 2]$  ale  $\neg((s, t) \in [0, 3] \times [-1, 2])$ . Na rysunku poniżej zaznaczono obszary całkowania dla funkcji  $f(x, y)$ ,  $g(s, t)$ . Rozpoczynamy od stwierdzenia, że  $s \in [0, 3]$ . Dla ustalonego  $s$  należy znaleźć przedział zmienności dla  $t$ . Wówczas przejdziemy do obliczenia całki  $\int_0^3 \int_{l(s)}^{h(s)} g(s, t) |J| dt ds$ . Symbole  $l(s), h(s)$  oznaczają granice całkowania po zmiennej  $t$  przy ustalonej wartości  $s$ .



$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 < \frac{s+t}{2} < 2 \\ 0 < \frac{s-t}{2} < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -s < t < 4-s \\ s-2 < t < s \end{cases}.$$

W podsumowaniu: dla ustalonego  $s \in [0, 3]$  jest  $t \in [\max\{-s, s-2\}, \min\{4-s, s\}]$ . Pod całką występuje wyrażenie  $\frac{s^2 - t^2}{8} dt ds$ , natomiast całki oznaczone są następujące

$$\int_0^1 \int_{-s}^s \dots + \int_1^2 \int_{s-2}^s \dots + \int_2^3 \int_{s-2}^{4-s} \dots = 1.$$

Witold Karczewski